



# Gara di matematica a squadre

23 agosto 2024



## GARA SCRITTA DA:

Alberto Cagnetta, Andrea Lavarone, Alessandro Minisini,  
Thomas Scarinzi ed Eugenio Trovarelli.

### Istruzioni generali

- ☞ Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- ☞ Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi come risposta la sua parte intera, salvo diversamente indicato.
- ☞ Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000. Se invece la quantità richiesta non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- ☞ Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si diano come risposta le ultime quattro cifre della risposta.
- ☞ I problemi sono in ordine di apparente difficoltà.
- ☞ Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tenere conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{1} = 1.0000 \quad \sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \pi = 3.1416$$

Scadenze:

- 🕒 10 minuti dall'inizio: termine scelta del JOLLY;
- 🕒 105 minuti dall'inizio: termine della gara.



**1 CERIMONIA DI APERTURA**

La cerimonia di apertura dei Giochi Olimpici prevede che tutti gli atleti sfilino sopra delle imbarcazioni lungo la Senna. I primi a sfilare sono gli atleti egiziani, chissà quando toccherà alla spedizione azzurra! In generale, gli atleti presenti sono  $A = (1 + 3 + \dots + 2025) \cdot (2 + 4 + \dots + 2024)$  e le barche sono  $B = 1^3 + 2^3 + \dots + 1012^3$ . Agli organizzatori interessa sapere il valore preciso del rapporto  $A/B$ . Quanto vale tale rapporto?

[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

**2 PORTABANDIERA**

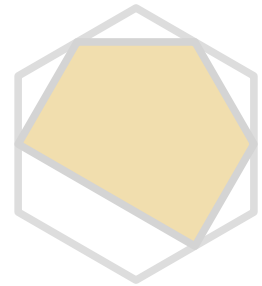
I nostri portabandiera ai Giochi Olimpici sono Arianna Errigo e Gianmarco Tamberi. Proprio quest'ultimo, durante la cerimonia, ha perso la propria fede nuziale nella Senna mentre sventolava la bandiera italiana. Sono tuttora in corso i tentativi di recupero dell'anello da parte dei sommozzatori. Finora hanno provato a recuperare l'anello in  $n$  diverse occasioni, dove  $n$  è il più piccolo intero positivo di due cifre tale che

$$n^{2025} - n^{2024}$$

sia un quadrato perfetto. Quanti tentativi sono stati effettuati finora?

**3 MEDAGLIE, PT. I**

Le medaglie di questi Giochi Olimpici hanno un design particolare. In ogni medaglia è infatti presente una decorazione a forma di esagono regolare, realizzata con ferro originale della Torre Eiffel! Inoltre, è presente una decorazione aggiuntiva: un pentagono i cui cinque vertici sono cinque dei punti medi dei lati dell'esagono. Sapendo che l'area della decorazione esagonale è  $16 \text{ cm}^2$ , qual è l'area della decorazione pentagonale, in  $\text{mm}^2$ ?

**4 JUDO**

Alice Bellandi si sta preparando ad affrontare la sua avversaria nella finale di judo categoria 78 kg. Il *tatami* su cui gareggerà ha una forma particolare, diversa dal solito quadrato. Esso ha la forma di un poligono convesso, le cui misure degli angoli interni (espresse in gradi) formano una progressione aritmetica di ragione 4. Sapendo che il maggiore tra gli angoli interni di tale poligono misura  $172^\circ$ , qual è il numero di lati del *tatami*?

**5 SCHERMA**

La squadra femminile di spada formata da Rossella Fiamingo, Giulia Rizzi, Alberta Santuccio e Mara Navarria si sta preparando per la finale. In una finale di scherma a squadre sono previsti uno dopo l'altro 9 assalti e l'allenatore ha deciso che due di questi li disputerà Fiamingo, tre li disputerà Rizzi, tre li disputerà Santuccio e uno lo disputerà Navarria. Inoltre, il regolamento prevede che Navarria potrà disputare il suo assalto solamente dopo che Fiamingo avrà terminato entrambi i suoi assalti. Sapendo che questo è l'unico vincolo imposto dal regolamento, in quanti ordini diversi potranno effettuare i 9 assalti le spadiste italiane?

**6 NUOTO, PT. I**

Thomas Ceccon non riesce proprio a dormire nel villaggio olimpico. Per questo motivo, prima della finale dei 100 metri dorso, decide di passare il tempo provando a risolvere il *quadrato magico* raffigurato a lato, in cui compaiono potenze di 4 maggiori di 1. Egli sa che il prodotto dei numeri su ogni riga, colonna e diagonale principale è costante e che in ogni casella bisogna inserire un numero diverso. Sapendo che il prodotto dei numeri sulle caselle azzurre è pari a  $4^x$ , quanto vale  $x$ ?

$4^{16}$			$4^{13}$
	$4^{11}$		
$4^9$		$4^6$	
			$4^1$

**7 TIRO CON L'ARCO**

Un bersaglio di tiro con l'arco è composto da 10 cerchi concentrici di diametro 1, 2, ..., 10 cm dal valore rispettivamente di 10, 9, ..., 1 punti. In questo momento, Mauro Nespoli sta per scoccare l'ultima freccia della gara. Sapendo che sicuramente non mancherà il bersaglio e che ogni punto del bersaglio ha la stessa probabilità di essere colpito, qual è la probabilità che l'arciere ottenga un punteggio dispari con la freccia che sta per scoccare?

[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

**8 CICLISMO SU PISTA**

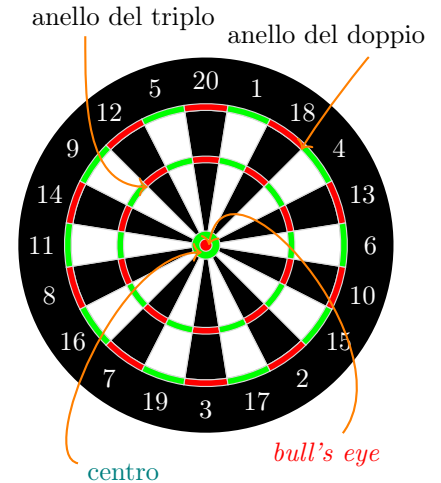
L'americana è una specialità del ciclismo su pista, che prevede vengano effettuate esattamente 2024 volate. In particolare, l' $n$ -ima volata (con  $1 \leq n \leq 2024$ ) mette in palio una quantità di punti pari al resto della divisione per 13 di  $25^n + 9^n$ . Le due cicliste italiane, Chiara Consonni e Vittoria Guazzini, notano quindi che ci sono alcune volate che non mettono in palio alcun punto! Quante sono le volate che non assegnano punti?

**9** TENNIS

La coppia di tenniste italiane Jasmine Paolini e Sara Errani sta giocando la finale del doppio femminile di tennis. Il punteggio del *tiebreak* in corso è di 6 – 6, per cui si andrà ai vantaggi. Dunque, quello che è successo fino a questo momento nel corso della partita non è importante: quello che conta è che la prima coppia che sarà in vantaggio di due punti sulla coppia avversaria vincerà il *tiebreak*. Sapendo che ogni punto, indipendentemente dai precedenti, viene vinto dalla coppia di tenniste italiane con una probabilità di  $3/5$ , qual è la probabilità che siano proprio loro a vincere il *tiebreak*? [Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

**10** FRECCETTE

Yusuf Dikeç, annoiato dalla facilità delle gare di pistola ad aria, decide di cimentarsi nelle freccette. Il bersaglio delle freccette è diviso in 20 settori, che portano al giocatore un punteggio da 1 a 20 quando centrati. Inoltre, sono presenti due anelli, detti *anello del doppio* e *anello del triplo*, che raddoppiano e triplicano rispettivamente il punteggio di quel settore (ad esempio, la porzione di anello del triplo nel settore 19 dà 57 punti). Inoltre, c'è il centro del bersaglio, che dà diritto a 25 punti, e il centro pieno del bersaglio (anche detto *bull's eye*), che dà diritto al doppio dei punti, 50. In una partita di freccette, ciascun giocatore parte da un certo punteggio a cui si sottraggono, di volta in volta, i punteggi ottenuti con i propri lanci, fino ad arrivare a esattamente 0. Inoltre, per vincere, il tiro che fa arrivare a 0 deve essere un tiro “doppio”: deve quindi centrare o l'anello del doppio o il centro pieno del bersaglio. A ogni round si lanciano tre freccette. Dikeç sta per iniziare il proprio round e il suo punteggio in questo momento è  $x > 0$ . Egli si accorge che, lanciando opportunamente le tre freccette (eventualmente anche fuori dal bersaglio), può arrivare esattamente a 0 e vincere, concludendo quindi con un tiro “doppio”. Quanti sono i diversi valori di  $x$  permettono a Dikeç di vincere la partita in questo turno?

**11** ATLETICA

Alla gara di salto con l'asta, Armand Duplantis è riuscito a saltare 6.25 metri, stabilendo così il nuovo record del mondo! Il trucco che gli permette di saltare così in alto è innanzitutto quello di tenere l'asta in modo che formi col terreno un triangolo  $ABC$  con  $AB < BC$  e  $\widehat{BAC} = 45^\circ$ . Egli chiama poi  $\omega$  la circonferenza circoscritta ad  $ABC$ ,  $D$  l'intersezione tra le due tangenti a  $\omega$  in  $B$  e  $C$  rispettivamente ed  $E$  l'intersezione tra  $BD$  e  $AC$ . Infine, la sua tecnica prevede di fare in modo che  $AE = 13$  m e  $AC = 7$  m. Quanto vale l'area del triangolo  $CDE$ , in  $m^2$ ?

**12** MEDAGLIE DI LEGNO...

Purtroppo, la spedizione italiana ai Giochi Olimpici ha raccolto un numero esorbitante di medaglie di legno! Esse sono state tante quante gli interi palindromi di quattro cifre  $\overline{abba}$  divisibili per  $\overline{bb}$ . Quante medaglie di legno ha raccolto la spedizione italiana?

**13** VELA

Ruggero Tita e Caterina Banti si stanno preparando prima di partire per l'ultima regata della gara di vela. Il percorso prevede il posizionamento di 42 boe  $B_1, B_2, \dots, B_{42}$  in linea retta, in modo tale che la distanza tra  $B_i$  e  $B_{i+1}$  sia  $1/i$ , dove  $1 \leq i \leq 41$ . Qual è la somma delle distanze tra ogni coppia di boe?

**14** GINNASTICA ARTISTICA

Alice D'Amato ha appena finito di eseguire il suo esercizio alla trave. Ora, tre giudici valuteranno l'esercizio tramite tre voti  $x, y, z$  reali positivi. Successivamente, il voto finale verrà calcolato tramite la funzione  $f(x, y, z) = 1000 \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz}$ . L'atleta italiana non ci mette molto a capire che, qualsiasi siano i voti dei tre giudici, il voto finale sarà sicuramente maggiore o uguale a  $K$ . Quanto vale  $K$ ?

**15** PALLAVOLO

Quest'anno il torneo olimpico di pallavolo femminile prevede la partecipazione di 32 squadre e si svolge nella seguente maniera: le squadre vengono accoppiate in modo casuale e, per ogni coppia, la squadra che perde viene eliminata dalla competizione. Le 16 squadre rimanenti vengono nuovamente accoppiate in modo casuale, e così via, finché non rimane una sola squadra, che viene decretata vincitrice. L'altezza delle pallavoliste è fondamentale: si sa infatti che in qualsiasi partita vince la squadra che, tra le due, ha un'altezza media maggiore. Sapendo che l'Italia è la terza squadra per altezza media (e che ogni squadra ha un'altezza media diversa), qual è la probabilità che arrivi almeno in semifinale?

[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

**16 TIRO SKEET**

Diana Bacosi e Gabriele Rossetti stanno disputando la finale dello skeet misto. Il piattello che devono colpire può compiere due traiettorie, che sono ben approssimate dai polinomi  $p(x) = x^2 - 2024x + 1$  e  $q(x) = x^2 - 2030x + 1$ . Siano  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  le due coppie di radici di  $p(x)$  e  $q(x)$  rispettivamente. Sembra che sapere il valore dell'espressione  $(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2)$  possa aiutare a colpire i piattelli con più precisione. Quanto vale tale espressione?

**17 CANOA SLALOM**

Nella canoa slalom ci sono due tipi di porte: le porte verdi vanno oltrepassate nel senso della corrente, mentre le porte rosse vanno oltrepassate controcorrente. Nella fase di studio del percorso, Giovanni De Gennaro ha notato che, detto  $x > 0$  il numero di porte verdi e  $y > 0$  il numero di porte rosse, vale che  $(x - y + 2)(x - y - 2) = -(x - 2)(y - 2)$ . Sapendo che le porte verdi sono almeno tante quante le porte rosse, quante sono le porte in totale?

[Dare come risposta la somma dei possibili risultati.]

**18 VELA WINDSURF**

Il percorso che Marta Maggetti dovrà affrontare nella finale a tre di windsurf è piuttosto complesso. Esso si costruisce a partire da un triangolo  $ABC$  rettangolo in  $C$ , di lati  $AC = 48 \text{ hm}$  e  $BC = 189 \text{ hm}$ . Bisogna poi considerare la proiezione  $H$  di  $C$  su  $AB$  e la circonferenza  $\omega$  di diametro  $CH$ . Infine, vanno tracciate le rette tangenti a  $\omega$  uscenti da  $A$  e  $B$  (diverse dalla retta  $AB$ ) e la loro intersezione  $P$ , punto in cui si trova il traguardo. Il percorso previsto dalla gara segue il perimetro del triangolo  $ABP$ . Quanti  $\text{hm}$  misura tale percorso?

**19 NUOTO, PT. II**

Per allenarsi per la finale dei 100 metri rana, Nicolò Martinenghi decide di nuotare  $a$  vasche giovedì,  $b$  vasche venerdì e  $c$  vasche sabato (dove  $a < b < c$  sono interi positivi), in modo tale che il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 2024 \\ y = |x - a| + |x - b| + |x - c| \end{cases}$$

abbia una unica soluzione. Quante vasche avrà nuotato in totale al massimo?

**20 MEDAGLIE, PT. II**

Le medaglie d'oro, d'argento e di bronzo di queste olimpiadi sono leggermente diverse tra di loro: nonostante siano tutte perfettamente circolari, possiedono dei raggi diversi tra loro, che misurano rispettivamente 1, 3 e 12  $\text{cm}$ . Le tre medaglie possono essere posizionate sul piano in maniera che siano a due a due tangenti. Detti  $O$ ,  $A$  e  $B$  i centri delle tre medaglie (rispettivamente d'oro, d'argento e di bronzo), si consideri una quarta circonferenza  $\omega$  passante per  $A$ ,  $B$  e tangente alla medaglia d'oro. Detto  $P$  il punto di tangenza tra  $\omega$  e la medaglia d'oro, quanto vale  $\left(\frac{PA}{PB}\right)^2$ ?

[Dare come risposta la somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

**21 BREAKING**

Ai Giochi Olimpici di Parigi 2024 fa il suo esordio la *break dance*. L'attenzione del pubblico è subito catturata dalla concorrente australiana, che esegue una coreografia "particolare". Per comprenderla, bisogna immaginare un pentagono regolare disegnato per terra con le sue cinque diagonali. Tutti i suoi lati e le sue diagonali vanno estesi all'infinito in entrambe le direzioni, dividendo il piano in diverse regioni, alcune delle quali di area infinita. La concorrente si trova al centro del pentagono e ogni secondo sceglie uno qualsiasi dei lati della regione nella quale si trova, con uguale probabilità, e lo oltrepassa. In questo modo, la concorrente raggiunge una nuova regione. Per completare la coreografia, ogni volta che la concorrente entra in una regione di area infinita esegue un *headspin*.

Dopo aver lasciato la regione centrale del pentagono, sia  $X$  il numero atteso di volte che la concorrente rientra in questa regione prima di eseguire un *headspin*. Quanto vale  $\lfloor 1000X \rfloor$ ?

**22 L'ACQUA DELLA SENNA**

I Giochi Olimpici stanno per finire e le analisi dell'acqua della Senna dicono che non è ancora balneabile! Il depuratore ormai è stato ultimato e per metterlo in funzione serve un codice di accesso che è un intero positivo quattro cifre. Tuttavia, nessuno si ricorda quale sia tale codice... Gli organizzatori cercano disperatamente un modo per risolvere il problema e per fortuna trovano degli appunti che recitano: "Il codice di accesso è  $(a - b)(c - b)$ , dove  $a, b, c$  sono interi positivi che massimizzano l'espressione  $\frac{abc(a+b+c)}{(a+b)^2(c+b)^2}$ ". A questo punto, non resta che provare tutti i codici compatibili con le informazioni ottenute. Quanti sono i codici possibili?